

Simplicité de A_n pour $n=3$ et $n \geq 5$

Romuald
p. 50

Recasages: 103, 104, 105, 108

Lemme: Les 3-cycles sont tous conjugués dans A_n , $n \geq 5$.

Preuve: Soient $\gamma = (x_1, x_2, x_3)$ et $\gamma' = (x_1', x_2', x_3')$ deux trois-cycles.

On sait que $\gamma' = \sigma \gamma \sigma^{-1}$ avec $\sigma \in S_n$.

• Si $\sigma \in A_n$, alors c'est bon

• Sinon, $\sigma \notin A_n$. $n \geq 5$: On prend $\sigma' = (x_4, x_5) \sigma \in A_n$ et

$\gamma' = \sigma' \gamma \sigma'^{-1}$ d'où le résultat.

Théorème: Pour $n=3$ ou $n \geq 5$, le groupe A_n est simple.

Preuve: On admettra que A_n est engendré par les 3-cycles.

• Si $n=3$, $A_n \cong Z/3Z$ qui est simple

• Si $n \geq 5$, soit H un sous-groupe distingué de A_n , $H \neq \{Id\}$.

Montrons que H contient un 3-cycle. Soit $\sigma \in H \setminus \{Id\}$.

Soit $\gamma = (x, y, z)$ avec $y = \sigma(x)$ tels que $\sigma \gamma \neq \gamma \sigma$ ($z \notin \{x, y, \sigma^{-1}(x)\}$).

On considère $\sigma' = [\sigma, \gamma] = \underbrace{\sigma \gamma \sigma^{-1} \gamma^{-1}}_{\in H} \in H$ car $H \triangleleft A_n$.

De plus, $\sigma' = (y, \sigma(z), \sigma(y)) (y, z, x)$

Donc σ' est un produit de deux 3-cycles qui agissent sur $F = \{x, y, z, \sigma(y), \sigma(z)\}$ formé d'au plus 5 éléments.

Comme $\sigma' \neq Id$, σ' s'écrit comme produit de cycles à supports disjoints dans S_F et cette décomposition est celle de S_n .

On a donc 3 possibilités

- Si σ' est un 3-cycle, on a le résultat

- Si $\sigma' = (x_1, x_2)(x_3, x_4)$, on pose $\rho = (x_1, x_2, x_5) \in A_n$

On considère $\sigma'' = [\sigma', \rho] = \underbrace{\sigma' \rho \sigma'^{-1} \rho^{-1}}_{\in H} \in H$ car $H \triangleleft A_n$

$\sigma'' = (\sigma'(x_1) \sigma'(x_2) \sigma'(x_5)) (x_1, x_2, x_5)$

$\sigma'' = (x_2, x_1, x_5)(x_5, x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_5)$ et on a le résultat

- Si $\sigma^1 = (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)$, alors on considère $\rho = (x_1 x_2 x_3)$
et $\sigma'' = [\sigma^1 \rho] \in H$ et on a :

$$\sigma'' = (\sigma^1(x_1) \sigma^1(x_2) \sigma^1(x_3)) (x_3 x_2 x_1)$$

$$\sigma'' = (x_2 x_3 x_4) (x_3 x_2 x_1) = (x_1 x_4 x_2) \text{ et on a le résultat.}$$

Preuve du fait que A_n est engendré par les 3-cycles :

Soit $\sigma \in A_n$. Alors σ est produit d'un nombre pair de transpositions.
Il suffit donc de montrer que le produit de 2 transpositions est
un 3-cycle (ou produit de deux 3-cycles).

• Si $T_1 = T_2$, alors $T_1 T_2 = \text{Id} = \gamma^3$

• Si $T_1 = (x y)$ et $T_2 = (x z)$, alors

$$T_1 T_2 = (x y)(x z) = (y x)(x z) = (y x z)$$

• Si $T_1 = (x y)$ et $T_2 = (z t)$

$$\begin{aligned} T_1 T_2 &= (x y)(z t) = (x y)(y z)(y z)(z t) \\ &= (x y z)(y z t) \end{aligned}$$